

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
лицей № 1
г. Комсомольск – на - Амуре

Направление: Математика

Исследовательская работа по теме
«Методы решения задач на вычисление площадей».

Подготовила: Булгакова Елизавета
8 класс, МБОУ лицей № 1

Научный руководитель:
Будлянская Наталья Леонидовна

2017 г.

Оглавление

1. Введение
2. Основная часть (понятие площади, основные формулы и свойства)
 - 2.1 Основные формулы и свойства площади
 - 2.2 Задачи на разрезание и складывание
 - 2.3 Задачи на площади подобных фигур
 - 2.4 Задачи на отношение площадей треугольников
 - 2.5 Задачи на сравнение площадей
 - 2.6 Площади в теоремах
3. Практическая часть
4. Заключение
5. Список используемой литературы

Введение

На уроках геометрии мы познакомились с темой «Площади». Решение задач на эту тему вызвало затруднение у многих моих одноклассников, а мне эта тема показалась интересной, но не до конца изученной. Я решила дополнить свои знания, изучив материал других источников.

Итак,

Объект моего исследования: «Площади» в теоремах и задачах

Предмет исследования: Задачи на площади

Цель исследования: Изучить возможности применения темы в решении задач по геометрии повышенной сложности. Выделить основные группы задач, решаемых с применением темы «Площади»

Задача: Создать свои задачи связанные с понятием площади

Актуальность: задачи на вычисление площадей встречаются в задачах ЕГЭ, ОГЭ, олимпиадах. Моя разработка будет полезна учащимся старших классов при подготовке к итоговой аттестации по математике.

Основная часть

2.1 Основные свойства площади

Для начала вспомним некоторые понятия и формулы, относящиеся к площади и ее вычислению.

Площадь — часть поверхности, ограниченная замкнутым контуром, одна из количественных характеристик плоских геометрических фигур и поверхностей.

Равносоставленные фигуры – фигуры, составленные из соответственно равных частей.

Равновеликие фигуры – фигуры, площади которых равны.

Формулы площади прямоугольника: $s = a \cdot b$; $S = \frac{d_2 \cdot \sin \alpha}{2}$

Формулы площади параллелограмма: $s = a \cdot h$; $S = ab \cdot \sin \alpha$; $S = \frac{d_1 d_2 \cdot \sin \alpha}{2}$

Формулы площади треугольника: $s = \frac{a \cdot h}{2}$; $S = \frac{ab \cdot \sin \alpha}{2}$; $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Формула площади трапеции: $s = (a+b)/2 \cdot h$; $S = hm$;

$$S = \frac{(a+b)}{2} \sqrt{c^2 - \left(\frac{(b-a)^2 + c^2 - d^2}{2(b-a)} \right)^2} ;$$

Формула площади ромба: $s = (d_1 d_2)/2$; $S = ah$; $S = a^2 \cdot \sin \alpha$; $S = 2ar$

Выделим основные свойства площади:

1⁰ Площадь каждого многоугольника – положительное число

2⁰ Площади равных многоугольников равны

3⁰ Если многоугольник разрезать на несколько частей, то его площадь будет равна сумме площадей получившихся фигур.

4⁰ Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна одной единице измерения площади.

Из формул площадей и других теорем следуют некоторые другие интересные свойства:

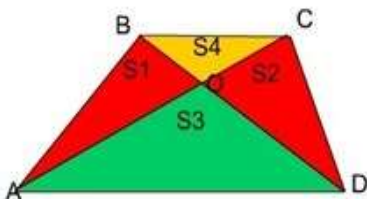
1. Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре равновеликих треугольника.



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

$S_1 = S_3$. $S_1 = S_2$, так как соответственные треугольники имеют равные основания (половинки диагонали) и общую высоту, к ним проведенную. Аналогично $S_3 = S_4$ и свойство доказано.

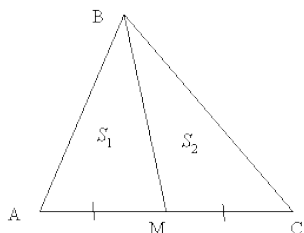
2. Диагонали трапеции образуют равновеликие треугольники. Они же образуют равновеликие треугольники при боковых сторонах трапеции.



Действительно: площади треугольников ABD и ACD – равны, так как у них общее основание AD и высоты, проведенные из точек B и C соответственно, равны. Но тогда $S_1 +$

$S_3 = S_2 + S_3$. Следовательно $S_1 = S_2$. Получили 3 пары равновеликих треугольников: ABD и ACD, ABO и DCO, ABC и DBC.

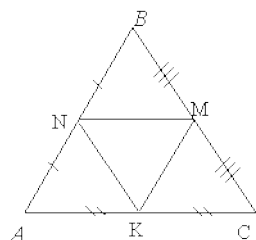
3. Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.



Рассмотрим $\triangle ABC$. Пусть медиана BM , тогда $AM = MC = 1/2 AC$.

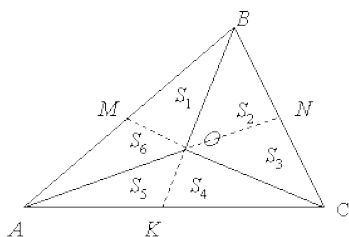
Медиана делит треугольник на два с одинаковой высотой. Найдем площади треугольников $\triangle ABM$ и $\triangle BMC$ по формуле $S = 1/2 \cdot a \cdot h$. Получим $S_{ABM} = 1/2 \cdot AM \cdot h$ и $S_{MBC} = 1/2 \cdot MC \cdot h$. Значит $S_{ABM} = S_{MBC}$.

4. Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники площади S/4



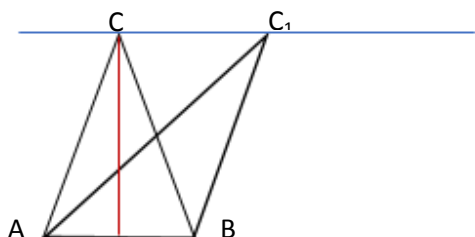
Рассмотрим $\triangle ABC$. NM - средняя линия в треугольнике, и она равна половине основания AC . Если $S_{ABC} = S$, то $S_{NBM} = 1/2 \cdot NM \cdot h_1 = 1/2 (1/2 \cdot AC) (1/2 \cdot h) = 1/4 \cdot S$. Аналогично можно доказать, что площади всех треугольников равны одной четвертой части площади $\triangle ABC$.

5. Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.



По свойству №7 площади $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ равны. По свойству №5 площади $\triangle AOM$, $\triangle BOM$ равны. Значит $S_1 = S_6$. Аналогично $S_2 = S_3$. Если $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$ и $2S_1 = 2S_2$, значит $S_1 = S_2$. И так далее. получим, что все шесть треугольника имеют равные площади и они составляют шестую часть от площади $\triangle ABC$.

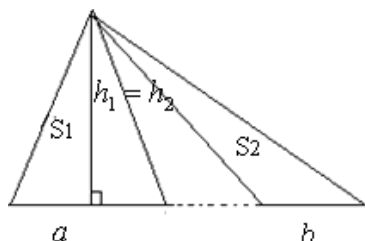
6. Треугольники, имеющие одинаковое основание и высоту, равновелики.



К таким треугольникам относятся, например, все треугольники с общим основанием АВ и вершинами, лежащими на прямой проходящей через т. С, параллельной АВ.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$. СН – общая высота, АВ – общее основание. Исходя из формулы площади треугольника $S=ah/2$, $S_1/S_2= AB \cdot h_1/AB \cdot h_1$. При сокращении получаем $S_1/S_2= 1/1$, т.е. площади равны.

7. Площади треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как основания, к которым проведены эти высоты.



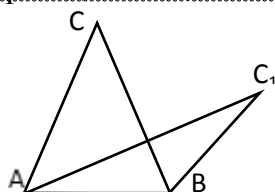
Пусть $h_1 = h_2$ в двух треугольниках с основаниями a и b .

Рассмотрим отношение площадей этих треугольников $S_1/S_2=(1/2 \cdot a \cdot h_1)/(1/2 \cdot b \cdot h_2)$

$S_1/S_2=(1/2 \cdot a \cdot h_1)/(1/2 \cdot b \cdot h_2)$

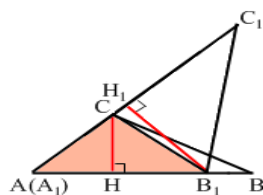
Упростив, получим $S_1/S_2=a/b$

8. Площади треугольников, имеющих равные основания, относятся как высоты, проведенные к этим основаниям.



Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$. Из условия мы знаем, что АВ- общее основание. Исходя из формулы площади треугольника $S=ah/2$ получаем, что $S_1/S_2= AB \cdot h_1/AB \cdot h_2$. При сокращении получаем $S_1/S_2=h_1/h_2$.

9. Площади треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.



Пусть S и S_1 – площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что

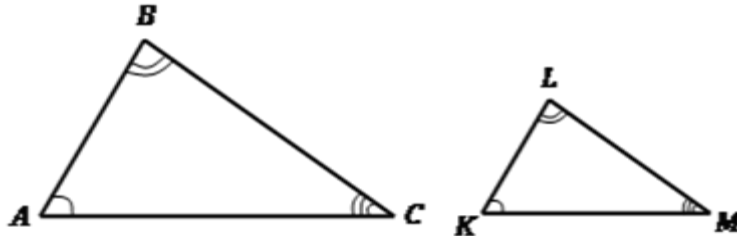
$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \times AC}{A_1B_1 \times A_1C_1}$$

Наложим треугольник на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совпала с вершиной A , а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC .

Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую высоту CH , поэтому $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \times AC}{A_1B_1 \times A_1C_1}$. Треугольники

AB_1C и AB_1C_1 также имеют общую высоту B_1H_1 , поэтому $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$. Перемножая полученные равенства, находим: $\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \times AC}{AB_1 \times AC_1}$ или $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \times AC}{A_1B_1 \times A_1C_1}$

10. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.



из подобия треугольников по определению следует, что $\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM} = k$

Мы знаем, если у двух треугольников равны углы ($\angle A = \angle K$), то их площади относятся, как произведение сторон, заключающих данные углы. Запишем этот факт в виде формулы:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AB \cdot AC}{KL \cdot KM} = \frac{AB}{KL} \cdot \frac{AC}{KM} = k \cdot k = k^2, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Таким образом, мною выделена первая группа задач на доказательство, решаемых с помощью свойств площадей.

Рассмотрим другой тип задач.

2.2 Задачи на разрезание и складывание

Задачи на разрезание, как один из видов головоломок, привлекали к себе внимание с древнейших времен. Первый трактат, в котором рассматриваются задачи на разрезание, написал знаменитый арабский астроном и математик из Хорасана Абу аль – Вефа (940 – 998 н.э.). В начале XX века благодаря бурному росту периодических изданий решение задач на разрезание фигур на то или иное число частей и последующее составление из них новой фигуры привлекает внимание как средство развлечения широких слоев общества. Теперь и геометры всерьёз занялись этими задачами, тем более, что в их основе лежит старинная задача о равновеликих и равноставленных фигурах, которая исходит еще от античных геометрах.

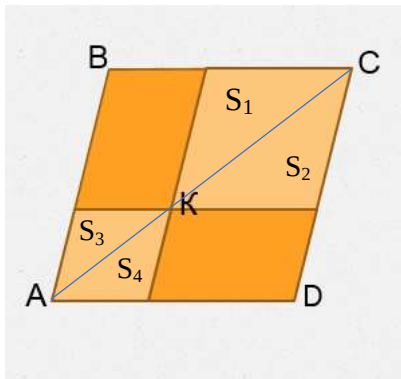
Задачи на разрезание и складывание решаются без вычислений, по принципу проведения простых геометрических построений и использования простейших свойств площади.

Так, например, если удастся разбить два многоугольника на одинаковые части, то отсюда вытекает, что их площади равны. Иногда проще дополнить фигуры некоторыми одинаковыми частями, чтобы убедиться, что они равновелики.

На практике поиск изящного, простого разрезания(или дополнения) требует изобретательности. Такие задачи часто встречаются в сборниках головоломок. Предлагаю примеры таких задач.

Задача 1.

Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на 4 части. Два из них пересекаются диагональю AC . Докажите, что два других равновелики.



Решение

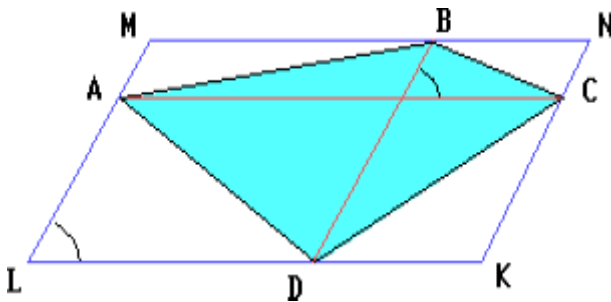
Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника, поэтому:

$$S_{ABC} = S_{ADC}, S_1 = S_2, S_3 = S_4$$

(каждый из отрезков AC , AK и KC – диагональ параллелограмма, делящая его на две равные части) Вычитая почленно из первого равенства два других, получаем, что площади залитых параллелограммов равны.

Задача 2.

Через каждую вершину выпуклого четырёхугольника проведены прямые, параллельные диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что площадь полученного таким образом параллелограмма вдвое больше площади данного четырёхугольника.



Решение

Диагонали данного четырёхугольника разбивают полученный параллелограмм на четыре параллелограмма, каждый из которых разбивается соответствующей стороной данного четырёхугольника на два равных, а значит, равновеликих треугольника. Следовательно, площадь полученного параллелограмма вдвое больше площади данного четырёхугольника.

Рассмотрим следующий тип задач.

2.3 Задачи на площади подобных фигур

Основные утверждения:

Две фигуры называются подобными, если каждой точке первой фигуры можно поставить в соответствие точку второй так, что расстояние между двумя любыми точками второй отличается в k раз от расстояния между первой, которым они соответствуют.

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия

Подобные фигуры можно одинаковым способом разрезать на треугольники, причем соответствующие треугольники будут подобны с тем же коэффициентом подобия. Пользуясь аддитивностью площади, представим площадь каждого многоугольника как сумму площадей составляющих его треугольников, если площадь первого равна $S_1+S_2+S_3+...+S_n=S$. То площадь подобного ему равна $k^2S_1+k^2S_2+...+k^2S_n=k^2S$

Разберем это на примере

Задача 1

Разделить данный треугольник на n равновеликих частей прямыми, параллельными его стороне.

Решение

Пусть, например, требуется разделить ABC на три равновеликие части отрезками, параллельными основанию AC .

Предположим, что искомые отрезки будут DE , FG . Очевидно, что если мы найдем отрезки BE и BG , то определятся и отрезки DE и FG .

Треугольники BDE , BFG и BAC подобны; поэтому $S_{BDE}/S_{BAC}=BE^2/BC^2$ и $S_{BFG}/S_{BAC}=BG^2/BC^2$

Но, $S_{BDE}/S_{BAC}=1/3$; $S_{BFG}/S_{BAC}=2/3$

Следовательно, $BE^2/BC^2=1/3$; $BG^2/BC^2=2/3$.

Откуда $BE=\sqrt{1/3BC^2}=\sqrt{1/3 BC \cdot BC}$; $BG=\sqrt{2/3 BC^2}=\sqrt{2/3 BC \cdot BC}$

Из этих выражений видим, что BE есть средняя пропорциональная между BC и $1/3 BC$, а BG есть средняя пропорциональная между BC и $2/3 BC$. Поэтому построение можно выполнить так: разделим BC на три равные части в точках a и b ; опишем на BC полуокружность; из a и b опустим к BC перпендикуляры aH и bK , Хорды BH и BK будут искомыми средними пропорциональными; первая – между всем диаметром BC и его третьей частью Ba , вторая – между BC и Bb , т.е. между BC и $2/3BC$. Остается отложить эти хорды на BC от точки B , тогда получим искомые точки E и G .

Подобным образом можно разделить треугольники на какое угодно число равновеликих частей.

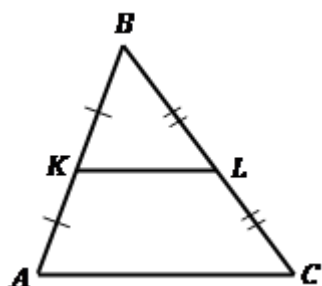
2.4 Задачи на отношение площадей треугольников

В основе метода площадей часто используется следующий прием: отношение отрезков расположенных на одной прямой иногда полезно заменить на отношение площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются данные отрезки.

Рассмотрим ряд примеров

Задача 1

Дан треугольник ABC , площадь которого равна 12 см^2 , и в нем проведена средняя линия KL параллельно AC . Необходимо найти площадь треугольника, который отсекает средняя линия от треугольника ABC .



Решение

Нужно найти площадь треугольника AKL . Треугольники ABC и AKL подобны, т.к. равны их углы ($\angle B$ — общий, $\angle K = \angle A$, $\angle L = \angle C$ как соответственные углы при параллельных прямых и секущей) и сходственные стороны пропорциональны с коэффициентом пропорциональности $k = 2$ (K и L — середины соответствующих сторон, а $KL = \frac{AC}{2}$ по теореме о средней линии).

Тогда по теореме об отношении площадей подобных

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AKL}} = 2^2 = 4 \Rightarrow S_{AKL} = \frac{S_{ABC}}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ см}^2.$$

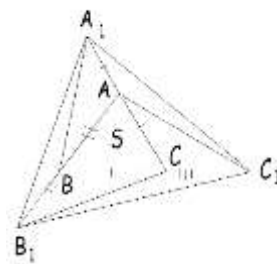
Ответ. 3 см^2

Задача 2

Дан треугольник ABC с площадью равной S . Все его стороны продолжили на их длину. Концы получившихся отрезков соединили и получился треугольник $A_1B_1C_1$. Найти его площадь.

Решение

Соединим вершины C и B . В полученном треугольнике ACB CB — медиана значит $S_{CB_1C} = S$. В треугольнике BB_1C B_1C — медиана значит $S_{BB_1C} = S_{CB_1C}$. Аналогично для двух оставшихся треугольников. $S_{A_1B_1C_1} = S_{BB_1C_1} + S_{C_1CA_1} + S_{AA_1B_1} + S_{ABC}$ т.е.
 $S_{A_1B_1C_1} = 7S$



2.5 Задачи на сравнение площадей

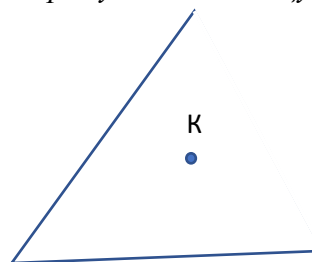
Существует множество геометрических задач о площадях многоугольников, связанных с оценками и неравенствами. Свойство площади, которое при этом используется, называют «монотонностью»:

Если фигура площади S_1 содержится в фигуре площади S_2 , то $S_1 \leq S_2$.

Задача на это свойство

Задача 1

Проведите через данную точку K внутри данного угла прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.



Решение

Докажем, что искомая прямая пересекает стороны угла в точках A и B , что $AK=KB$

Пусть A_1B_1 – некоторый отличный от AB отрезок с концами на сторонах угла, проходящий через точку K . Отражая треугольник KBB_1 симметрично относительно точки K и сравнивая его площадь с площадью треугольника KAA_1 мы видим, что разность $S_{OA_1B_1} - S_{OAB}$ в обоих случаях, показанных на рисунках, положительна: в первом случае $S_{KAA_1} < S_{KBB_1}$, а во втором $S_{KAA_1} > S_{KBB_1}$.

2.6 Площади в теоремах

Очень просто доказывается с помощью площадей теорема Чебы : В произвольном треугольнике ABC на сторонах BC , CA , AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 , такие, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в некоторой общей точке, тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

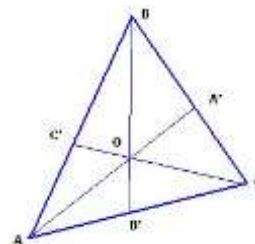
Доказательство

С одной стороны,

$S_{AOB'}/S_{COB'} = AB'/B'C$. С другой стороны, это же отношение площадей равно отношению высот треугольников AOB' и COB' , проведенных к основанию OB' , равно как и отношению площадей треугольников AOB и COB .

Таким образом, $AB'/B'C = S_{AOB}/S_{COB}$.

Записав аналогичные равенства для отношений $CA'/A'B$ и $AC'/C'B$ и затем перемножив их всех, получим требуемое утверждение.



Практическая часть

Задача моего исследования - создать свои задачи связанные с понятием площади. Ведь одно дело - решать задачи, основанные на понятии площадь, а другое – составлять такие задачи, ведь при составлении человеку больше понятен смысл их решения.

Итак, вот мои задачи

1. Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle KLM$ подобны. Площадь ABC равна 500 см^2 , площадь $\triangle KLM$ равна 125 см^2 . Сторона AC равна 18 см , найти сходственную ей сторону KM .

Решение

Поскольку отношение площадей треугольников: $\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{500}{125} = 4$, то по теореме $k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$.

Тогда из подобия треугольников: $\frac{AC}{KM} = 2 \Rightarrow KM = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см}$.

Ответ. 9 см .

2. Найти отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90° .

Решение

Пусть в треугольнике ABC отрезок BM служит медианой, при этом

$\angle AMB = 90^\circ$, $\angle CBM = 30^\circ$. Возьмем на продолжении отрезка BM точку D так, что $BM = MD$. Тогда треугольники ABM и CDM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle BDC = 90^\circ$. Поэтому треугольник BDC - прямоугольный с углом CBD , равным 30° . Следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

3. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

Решение

Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BE . Поскольку $S_{ABE} = S_{ABC}$,

то $S_{AKE} = S_{BKC}$. Поэтому $AK \cdot KE = BK \cdot KC$, или $\frac{AK}{KC} = \frac{BK}{KE}$. Следовательно, $EC \parallel AB$. Аналогично докажем, что остальные диагонали также параллельны соответствующим сторонам.

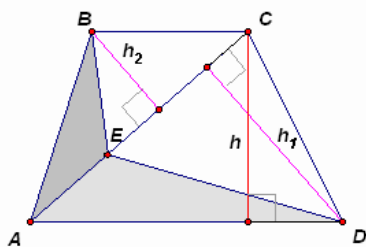
Поскольку $DEKC$ — параллелограмм, то $S_{\triangle EKC} = S_{\triangle EDC} = 1$. Обозначим $S_{\triangle AKE} = x$. Тогда

$$\frac{S_{\triangle AKE}}{S_{\triangle AKB}} = \frac{EK}{KB} = \frac{x}{1-x} = \frac{S_{\triangle EKC}}{S_{\triangle CKB}} = \frac{1}{x}.$$

Из уравнения $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$ находим, что $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно,

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{DEKC} + S_{AKE} = 1 + 2 + x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

4. Точка E лежит на диагонали AC трапеции $ABCD$. Найдите отношение ее оснований BC и AD , если площадь треугольника ADE в два раза больше площади треугольника ABE .



Решение

Пусть h_1 и h_2 — перпендикуляры, опущенные на диагональ AC из вершин D и B соответственно, а h — высота трапеции (см. рис. 2).

$$\frac{1}{2} = \frac{S_{ABE}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} AE \cdot h_2}{\frac{1}{2} AE \cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{1}{2} h_2 \cdot AC}{\frac{1}{2} h_1 \cdot AC} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} h \cdot BC}{\frac{1}{2} h \cdot AD} = \frac{BC}{AD}.$$

Тогда

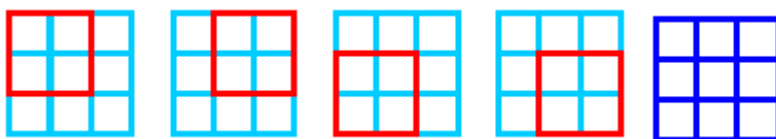
$$\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$$

Ответ:

5. На плоскости нарисованы красные и синие квадраты, причем множество точек, являющихся вершинами синих квадратов, совпадает со множеством точек, являющихся вершинами красных. Верно ли, что какие-то два квадрата обязательно совпадают?

Решение

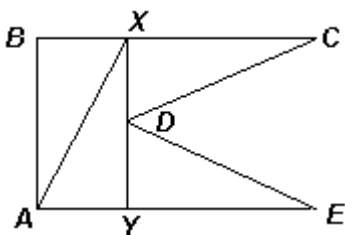
Например, девять синих квадратов и 4 красных квадрата имеют одно и то же множество вершин, но никакие два квадрата не совпадают.



Ответ: нет, не верно.

6. Существует ли пятиугольник, который одним прямолинейным разрезом можно разбить на три части так, что из двух частей можно будет сложить третью?

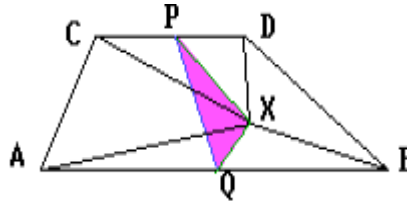
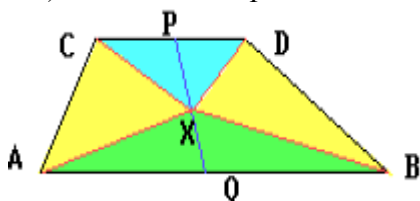
Решение



Рассмотрим, например, пятиугольник $ABCDE$, составленный из прямоугольника $ABXY$ и равных прямоугольных треугольников CDX и EDY . Если выбрать размеры пятиугольника так, чтобы $AB = CX = EY = 2BX = 2DX = 2DY$, и разрезать его по прямой XY , то из прямоугольных треугольников CDX и EDY можно будет сложить прямоугольник $ABXY$.

Существуют и другие примеры.

7. Найдите геометрическое место точек X , лежащих внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) или на ее сторонах, если известно, что $S_{XAB} = S_{XCD}$.



Решение

Пусть P и Q — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, h — высота трапеции. Если точка X принадлежит отрезку PQ , то XP и XQ — медианы треугольников BXC и AXD , поэтому

$$S_{XBP} = S_{XCP}, S_{XAQ} = S_{XDQ}.$$

Кроме того,

$$S_{ABPQ} = \frac{1}{2} (BP + AQ)h = \frac{1}{2} (CP + DQ)h = S_{CPQD}.$$

Следовательно, $S_{XAB} = S_{XCD}$.

Пусть теперь X — точка внутри трапеции $ABCD$, для которой $S_{XAB} = S_{XCD}$. Предположим, что X не лежит на прямой PQ . Поскольку

$$S_{XBP} = S_{XCP}, S_{XAQ} = S_{XDQ},$$

то

$$S_{ABPXQ} = S_{CPXQD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Если точки X и C лежат по одну сторону от прямой PQ , то

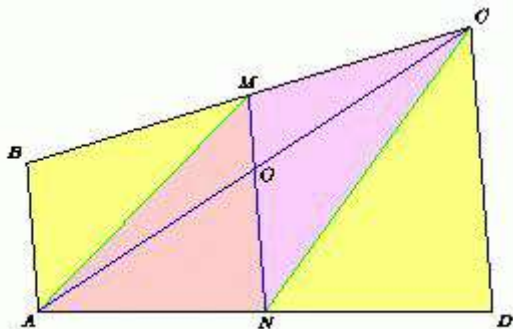
$$\frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{ABPQ} + S_{PXQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} + S_{PXQ},$$

что невозможно, если точка X не лежит на прямой PQ .

Аналогично для случая, когда точки X и C лежат по разные стороны от прямой PQ .

Ответ: Отрезок, соединяющий середины оснований.

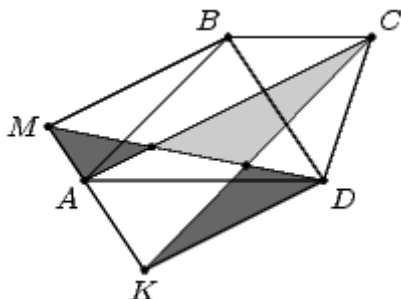
8. Точки M и N – середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Диагональ AC проходит через середину отрезка MN . Докажите, что треугольники ABC и ACD равновелики.



Решение

Пусть O – середина MN . Поскольку медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ACD} = 2S_{ACN} = 2(S_{AON} + S_{CON}) = 2(S_{AOM} + S_{COM}) = 2S_{AMC} = S_{ABC}$.

9. Трапеция $ABCD$ и параллелограмм $MBDK$ расположены так, что стороны параллелограмма параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что площадь серой части равна сумме площадей черных частей.



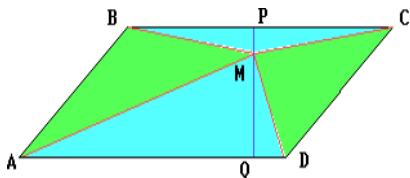
Решение

Заметим, что утверждение задачи равносильно равенству площадей треугольников KMD и AKC . Так как $AC \parallel KD$, то $AKDC$ — трапеция, следовательно, $S_{AKC} = S_{ADC}$.

Аналогично, в трапеции $ABCD$: $S_{ADC} = S_{ADB}$. В то же время, $S_{ADB} = 1/2 S_{MBDK} = S_{KMD}$.

10. Докажите, что сумма площадей двух противоположных треугольников равна половине площади параллелограмма (или проведите через данную точку прямые, параллельные сторонам параллелограмма).

Решение



Пусть M — точка внутри параллелограмма $ABCD$, P и Q — её проекции на прямые BC и AD . Тогда

$$\begin{aligned} S_{MBC} + S_{AMD} &= \frac{1}{2}BC \cdot MP + \frac{1}{2}AD \cdot MQ = \\ &= \frac{1}{2}AD \cdot (MP + MQ) = \frac{1}{2}AD \cdot PQ, \end{aligned}$$

причём PQ — высота параллелограмма $ABCD$. Поэтому найденная сумма равна половине площади параллелограмма.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны.
2. Докажите, что: а) середины сторон четырехугольника - вершины параллелограмма; б) площадь выпуклого четырехугольника вдвое больше площади параллелограмма с вершинами в серединах его сторон
3. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные сторонам: они делят треугольник на шесть частей, из которых три - параллелограммы. Площади этих параллелограммов T_1, T_2, T_3 . Найдите площадь треугольника.
4. Точки P, Q, R расположены соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC площади S так, что $AP=AB/3, BQ=BC/3, CR=CA/3$. Найдите площадь треугольника MNK ограниченного прямыми AQ, BR, CP .
5. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разбита двумя точками в отношении $1:\sqrt{2}:1$. Через две соседние с каждой вершиной точки проводится прямая. Докажите, что площадь четырехугольника, образуемого этими прямыми, равна площади исходного четырехугольника.
6. В треугольнике ABC : $AB=10, BC=12, AC=8$. На отрезке AB взята точка так, что $AK:KB=2:3$, стороне BC -точка M так, что $BM:MC=2:1$. На отрезке KM взята точка O так, что $KO:OM=4:5$. Площадь какого из треугольников: ABO, BCO или ACO является наименьшей?
7. В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Доказать, что площадь общей каких-нибудь двух прямоугольников больше или равна части.
8. Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Докажите, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2
9. В остроугольном треугольнике из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на две другие стороны. Доказать, что площадь полученного шестиугольника равна половине площади исходного треугольника.
10. В треугольнике ABC взята внутренняя точка P и через нее проведены прямые A_2C_1, A_1B_2, B_1C_2 , так что $A_2C_1 \parallel AB, A_1B_2 \parallel AC, B_1C_2 \parallel BC$. Доказать, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$

Выводы

Формулы, сведения и следствия из теорем о площади помогают решать задачи, доказывать различные теоремы. Исследуя эту тему, я многое открыла для себя из мира площади и выполнила цель самой работы – классифицировала задачи, связанные с площадью и методы их решения, выполнила задачу исследования – составила свои задачи на площадь.

Список использованной литературы

1. «Геометрия, 8 класс». Александров А.Д. и др.— М.: Просвещение, 2006.
2. «Геометрия». Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В., 8 класс. — М.: Просвещение, 2011.
3. «Геометрия». Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир С.М., 8 класс. — М.: ВЕНТАНА-ГРАФ, 2009.
4. «Элементарная геометрия» Адамар Ж. - М.:«Учпедгиз», 1948
5. «Учимся решать задачи по геометрии» Полонский В.Б., Рабинович Е.М. - К.:«Магістр-S», 1996
6. «Элементарная математика» Сканами М.И. - М.:«Высшая Школа», 1967
7. «Алгоритмический подход к решению геометрических задач» Габович И.Г. - К.: «Радянська», 1989.
8. <http://www.problems.ru/>
9. Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 кл.: Учеб. Пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. Математики/Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. - 4-е изд. — М,2004
10. www.wikipedia.org